Théorèmes de convergence

Voici un formulaire sur les théorèmes de convergence des suites et séries de fonctions, et sur les fonctions définies par une intégrale. Ces résultats sont précieux et à conserver sous la main.

1 Famille de fonctions

Définition 1 *Soient E un ensemble, (F, d) un espace métrique, G un espace topologique, $\Lambda \subset G$, $\lambda_0 \in \overline{\Lambda}$ et $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'applications de E vers F.*

*1) La famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ **converge simplement sur** E vers l'application $f : E \to F$ quand λ tend vers λ_0 si pour tout $x \in E$, $\lim_{\lambda \to \lambda_0} f_\lambda(x) = f(x)$. Dans ce cas f s'appelle **la limite simple** de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.*

*2) La famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ **converge uniformément sur** E quand λ tend vers λ_0 vers une application $f : E \to F$ si $\lim_{\lambda \to \lambda_0} (\mathrm{Sup}\, d(f_\lambda(x), f(x))) = 0$. Dans ce cas f s'appelle **la limite uniforme** de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.*

Théorème 1 *La convergence uniforme entraîne la convergence simple.*

Théorème 2 *{[2] IV 2.2.1 4°} (**Continuité)***
Soient E et G deux espaces topologiques, F un espace métrique, $\Lambda \subset G$ et $\lambda_0 \in \overline{\Lambda}$. Si la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'applications continues de E vers F converge uniformément vers une fonction f quand λ tend vers λ_0, alors f est continue.

Théorème 3 *{[2] 2.2.1 5°} (**Interversion des limites)***
Soient E, F et G trois espaces métriques avec $E_0 \subset E$ et $x_0 \in \overline{E}_0$; $G_0 \subset G$ et $y_0 \in \overline{G}_0$. On suppose que l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & E_0 \times G_0 & \to & F \\ & (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

vérifie :

a) $(f(., y))_{y \in G_0}$ converge uniformément sur E_0 vers la fonction $f_0 : E_0 \to F$ quand $y \to y_0$,

b) $(f(x, .))_{x \in E_0}$ converge simplement sur G_0 vers la fonction $g_0 : G_0 \to F$ quand $x \to x_0$,

c) $\lim_{y \to y_0} g_0(y)$ existe (cette condition est automatiquement vérifiée si l'on suppose F complet).

Alors $\lim_{x \to x_0} f_0(x)$ existe et $\lim_{x \to x_0} f_0(x) = \lim_{y \to y_0} g_0(y)$, autrement dit :

$$\lim_{x \to x_0} (\lim_{y \to y_0} f(x, y)) = \lim_{y \to y_0} (\lim_{x \to x_0} f(x, y)).$$

[0] [cfon0012] v1.02 © 2015 Dany-Jack Mercier

Théorème 4 *{[2] 2.2.3 2º } (**Dérivabilité**)*
Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille d'applications dérivables de l'intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *dans un espace vectoriel normé* F*, indexée sur une partie* Λ *d'un espace métrique* G*. Soit* $\lambda_0 \in \overline{\Lambda}$*. On suppose que :*

(a) $(f_\lambda)_\lambda$ *converge simplement sur* I *vers une application* f *quand* $\lambda \to \lambda_0$*,*
(b) $(f'_\lambda)_\lambda$ *converge uniformément sur* I *vers une application* g *quand* $\lambda \to \lambda_0$*.*

Alors f *est dérivable,* $f' = g$ *et la convergence de* $(f_\lambda)_\lambda$ *vers* f *a lieu uniformément sur tout borné inclus dans* I*. De plus, si* F *est complet, on peut remplacer la condition (a) par :*

(a') Il existe $x_0 \in I$ *tel que* $(f_\lambda(x_0))_\lambda$ *converge.*

Théorème 5 *{[2] 2.2.4 5º} (**Intégrabilité**)*
Soient $[a,b]$ *un intervalle fermé de* $\mathbb{R}$*,* G *un espace topologique,* $\Lambda \subset G$ *et* $\lambda_0 \in \overline{\Lambda}$*. Si* $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *est une famille d'applications intégrables de* $[a,b]$ *dans un espace de Banach* F *qui converge uniformément sur* $[a,b]$ *vers une application* f *quand* λ *tend vers* λ_0*, alors* f *est intégrable et :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\substack{\lambda\to\lambda_0 \\ \lambda\in\Lambda}} \int_a^b f_\lambda(t)\,dt.$$

2 Suites de fonctions

Théorème 6 *{[2] 2.2.1.1°} (**Continuité**)*
Si une suite d'applications sur un espace topologique E*, à valeurs dans un espace métrique, converge uniformément sur* E*, et si toutes les applications formant cette suite sont continue en un point* a *de* E*, sa limite est une application continue en* a*.*

Théorème 7 *{[2] 2.2.1.1° et 2°} (**Continuité**)*
Si une suite d'applications continues sur un espace topologique E *(resp. uniformément continues sur un espace métrique* E*) à valeurs dans un espace métrique, converge uniformément sur* E*, sa limite est une application continue (resp. uniformément continue) sur* E*.*

Théorème 8 *(**Interversion de limites**)*
Soit $(f_n)_n$ *une suite d'applications définies sur une partie* A *d'un espace topologique* E*, à valeurs dans un espace métrique* F*. Soit* $a \in \overline{A}$*. On suppose que :*

(a) $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* A *vers une application* f*,*
(b) $\lim_{x\to a} f_n(x) = l_n$ *pour tout* n*,*
(c) $\lim_{n\to+\infty} l_n$ *existe (cette condition est automatiquement vérifiée si* F

est complet).
Alors $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe et :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to+\infty} l_n.$$

Théorème 9 *{[2] 2.2.3 1°} (**Dérivabilité**)*
Soit $(f_n)_n$ *une suite d'applications dérivables d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *dans un espace vectoriel normé* F*. On suppose que :*
(a) $(f_n)_n$ *converge simplement sur* I *vers* f*,*
(b) $(f'_n)_n$ *converge uniformément sur* I *vers* g*.*
Alors f *est dérivable,* $f' = g$ *et la convergence de* $(f_n)_n$ *vers* f *a lieu uniformément sur toute partie bornée de* I*. De plus, si* F *est complet, on peut remplacer la condition (a) par :*
(a') Il existe $a \in I$ *tel que* $(f_n(a))_n$ *converge.*

Voici une conséquence des Théorèmes 7 et 9 :

Théorème 10 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite d'applications de classe* C^1 *d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *dans un espace vectoriel normé* F*. On suppose que :*
(a) $(f_n)_n$ *converge simplement sur* I *vers* f *,*
(b) $(f'_n)_n$ *converge uniformément sur* I *vers* g*.*
Alors f *est de classe* C^1 *sur* I *et* $f' = g$*.*

Théorème 11 *{[2] 2.2.4 1°} (**Intégrabilité**)*
Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions intégrables d'un intervalle fermé borné* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *dans un Banach* F*. Si* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$*, alors* f *est intégrable et :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

3 Séries de fonctions

3.1 Conditions suffisantes de convergence uniforme

Définition 2 *(**Convergence normale**)*
Une série $\sum f_n$ *d'applications d'un ensemble* E *vers un Banach* F *est dite* ***normalement convergente*** *si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Sup}_{x\in E} \|f_n(x)\|$ *converge. Cela revient à dire qu'il existe une suite* $(a_n)_n$ *de réels positifs telle que* $\sum a_n$ *converge et* $\mathrm{Sup}_{x\in E} \|f_n(x)\| \leq a_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Théorème 12 *{[2] 2.4.2 1°} Si une série* $\sum f_n$ *converge normalement, alors elle converge uniformément, et donc aussi simplement.*

Théorème 13 *{[2] 2.4.2 2°}* ***(Règle d'Abel)***
Soient (f_n) *et* (g_n) *deux suites d'applications d'un ensemble* E *respectivement dans* $\mathbb{R}$ *et dans un espace de Banach* F*. La série* $\sum f_n g_n$ *converge uniformément sur* E *si :*

i) La suite (G_n) *où* $G_n = \sum_{k=0}^{n} g_n$ *est uniformément bornée, c'est-à-dire :*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \operatorname*{Sup}_{x\in E} \left\| \sum_{k=0}^{n} g_k\left(x\right) \right\| \leq M.$$

ii) La suite (f_n) *converge uniformément vers l'application nulle,*
iii) Pour tout $x \in E$*, la suite* $\left(f_n\left(x\right)\right)_n$ *est décroissante.*

Le Théorème 13 permet d'obtenir immédiatement ces deux résultats très utiles :

Théorème 14 ***(Séries alternées)*** *La série* $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n$ *converge uniformément sur* E *dès que* (f_n) *vérifie les conditions ii) et iii) du Théorème 13.*

Théorème 15 *{[1]}* ***(Séries trigonométriques)*** *La série* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{inx}$ *converge uniformément sur tout intervalle de la forme* $[\alpha + k2\pi, -\alpha + k2\pi + 2\pi]$ *(où* $\alpha \in]0, \pi[$*) dès que la suite* (c_n) *est réelle décroissante et tend vers* 0*.*

3.2 Résultats

Théorème 16 *{[2] 2.4.3 1°}* ***(Continuité)***
Si E *est un espace topologique,* F *un espace vectoriel normé,* a *un point de* E *et si* $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ *est une série d'applications de* E *dans* F *toutes continues en* a*, qui converge uniformément vers* f *sur* E*, alors l'application* f *est continue en* a*.*

Théorème 17 *{[2] 2.4.3 1° & Théorème 7}* ***(Continuité)***
Si une série d'applications continues sur un espace topologique E *(resp. uniformément continues sur un espace métrique* E*), à valeurs dans un espace vectoriel normé, converge uniformément sur* E*, sa limite est une application continue (resp. uniformément continue) sur* E*.*

Théorème 18 *{[2] 2.4.3 2°}* ***(Interversion de limites)***
Soit $\sum f_n$ *une série d'applications d'une partie* A *d'un espace topologique* E *dans un espace vectoriel normé* F*. Soit* $a \in \overline{A}$*. On suppose que :*

(a) $\sum f_n$ *converge uniformément sur* A *vers une application* f*,*
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* $\lim_{x\to a} f_n\left(x\right) = l_n$*,*

(c) $\sum l_n$ converge (cette condition est automatiquement vérifiée si F est complet).

Alors $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe et :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} l_n.$$

Autrement dit : $$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Théorème 19 *{[2] 2.4.3 1°} (**Dérivabilité**)*
Soit $\sum f_n$ une série d'applications dérivables définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé F. On suppose que :

(a) $\sum f_n$ converge simplement sur I vers f,
(b) $\sum f'_n$ converge uniformément sur I vers g.

Alors f est dérivable, $f' = g$ et la convergence de $\sum f_n$ vers f a lieu uniformément sur toute partie bornée de I. On peut donc écrire :

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)' = \sum_{n\in\mathbb{N}} f'_n.$$

De plus, si F est complet, on peut remplacer la condition (a) par :

(a') Il existe $a \in I$ tel que $\sum f_n(a)$ converge.

Voici une conséquence directe des Théorèmes 17 et 19 :

Théorème 20 *Soit $\sum f_n$ une série d'applications de classe C^1 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé F. Si :*

(a) $\sum f_n$ converge simplement sur I vers f ,
(b) $\sum f'_n$ converge uniformément sur I vers g,

alors f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.

Théorème 21 *{[2] 2.4.3 1°} (**Intégrabilité**)*
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions intégrables au sens de Riemann de l'intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ vers un espace de Banach F. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, et :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

4 Intégrales impropres

4.1 Conditions suffisantes de convergence uniforme

Soient E un ensemble, F un espace de Banach, et a un réel. Dans ce qui suit, on a décidé de se placer sur l'intervalle $[a,+\infty[$ mais il reste entendu que l'on peut modifier légèrement les énoncés pour les adapter aux cas où l'intégrale impropre est définie sur $[a,b[$, avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Définition 3 ***(Convergence normale)*** *Soit :*

$$f: \begin{array}{ccc} E \times [a,+\infty[& \rightarrow & F \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$$

telle que $t \mapsto f(x,t)$ soit localement intégrable pour tout $x \in E$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,dt$ ***converge normalement*** *s'il existe une application $g : [a,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :*

$$\forall (x,t) \in E \times [a,+\infty[\quad \|f(x,t)\| \leq g(t) \quad \text{et} \quad \int_a^{+\infty} g(t)\,dt \text{ converge.}$$

Théorème 22 *{[2] 2.3.2 1°} Si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,dt$ converge normalement, alors elle converge uniformément.*

Théorème 23 *{[2] 2.3.2 1°}* ***(Règle d'Abel)***
Soient E un ensemble et f (resp.g) une application de $E \times [a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,g(x,t)\;dt$ converge uniformément sur E si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

i) Pour tout $x \in E$ l'application $t \mapsto g(x,t)$ est localement intégrable sur $[a,+\infty[$ et il existe un constante M telle que :

$$\forall u,v \in [a,+\infty\ [\quad \operatorname*{Sup}_{x\in E}\left|\int_u^v g(x,t)\;dt\right| \leq M,$$

ii) L'application $x \mapsto f(x,t)$ converge uniformément sur E vers l'application nulle quand $t \rightarrow +\infty$,

iii) Pour tout $x \in E$ l'application $t \mapsto f(x,t)$ est positive décroissante.

4.2 Résultats

Théorème 24 *{[2] 2.3.3}* ***(Continuité)***
Soient E un espace topologique, F un Banach et $f : E \times [a,+\infty[\rightarrow F$. Si f est continue et si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x,t)\;dt$ converge uniformément sur E, alors l'application $x \mapsto \int_a^{+\infty} f(x,t)\;dt$ est continue sur E.

Théorème 25 *{[2] 2.3.3} (**Dérivabilité**)*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times [a, +\infty[\rightarrow F$ une application continue à valeurs dans un espace de Banach F, admettant une dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I \times [a, +\infty[$. On suppose que :

(a) l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,dt$ converge simplement sur I,

(b) l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ converge uniformément sur I.

Alors l'application :

$$\varphi : x \mapsto \int_a^{+\infty} f(x,t)\,dt$$

est continûment dérivable sur I, de dérivée :

$$\varphi'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

De plus, si F est complet, on peut remplacer la condition (a) par :

(a') Il existe $x_0 \in I$ tel que $\int_a^{+\infty} f(x_0,t)\,dt$ converge.

Théorème 26 *{[2] 2.3.3} (**Intégrabilité**)*
Soient F un Banach et $f : [c,d] \times [a, +\infty[\rightarrow F$ une application continue telle que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,dt$ soit uniformément convergente sur $[c,d]$. Alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} (\int_c^d f(x,t)\,dx)\,dt$ est convergente et :

$$\int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x,t)\,dx \right) dt = \int_a^d \left(\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dt \right) dx.$$

References

[1] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours, Vol. VIII - Pour quelques questions de plus, à paraître.

[2] E. Ramis, C. Deschamps, J.Odoux, Cours de Math.Spéciales, Volume **4**, Séries et Equations Différentielles, Masson, 1989.